

## ĐỀ THI MÔN TOÁN HỌC KỲ I — KHỐI 12

Thời gian: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

### Câu 1: (4,0 điểm)

Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2 + 2 - m$  có đồ thị là  $(C_m)$ ,  $m$  là tham số

1/ Khảo sát và vẽ đồ thị  $(C_0)$  của hàm số khi  $m = 0$

2/ Tìm các giá trị của  $m$  sao cho phương trình  $x^4 - 2x^2 + 2 - m = 0$  có hai nghiệm phân biệt.

3/ Chứng minh rằng với mọi giá trị của  $m$  tam giác có 3 đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị  $(C_m)$  là một tam giác vuông cân.

### Câu 2: (2 điểm)

1/ Giải phương trình:  $5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100$

2/ Giải phương trình:  $\log_2(3^x - 1) \cdot \log_4(2 \cdot (3^x - 1)) = 1$

### Câu 3: (3,5 điểm)

Trong mặt phẳng  $(P)$  cho đường tròn  $(C)$  tâm  $O$  đường kính  $AB = 2R$ . Trên đường thẳng vuông góc với  $(P)$  tại  $O$  lấy điểm  $S$  sao cho  $OS = R\sqrt{3}$ .  $M$  là một điểm thuộc  $(C)$ .

1/ Khi  $M$  là điểm giữa cung  $AB$ , ( $\square MA = \square MB$ )

a/ Tính thể tích tứ diện  $S.ABM$  và khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(SAM)$

b/ Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện  $S.ABM$

2/ Khi  $M$  di động trên  $(C)$ ,  $I$  là điểm thuộc đoạn  $OS$  với  $SI = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ ,  $H$  là hình chiếu của  $I$  trên  $SM$ . Tìm vị trí của  $M$  để tứ diện  $ABHM$  có thể tích lớn nhất.

### Câu 4: (0,5 điểm)

1/ Dành cho các lớp:  $12A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$

Cho các số thực không âm  $x, y, z$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

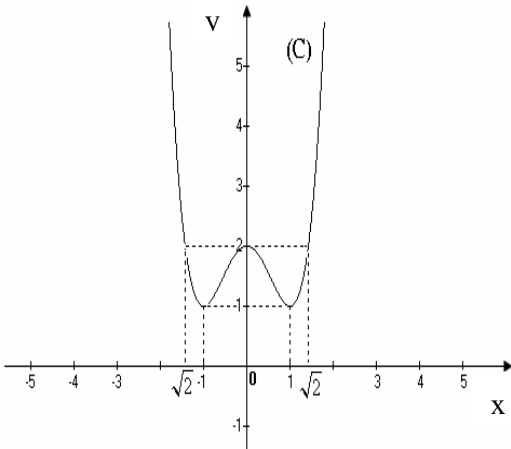
$$A = \frac{x + y + z}{(x + y + z)(xy + yz + zx) + 3}.$$

2/ Dành cho các lớp:  $12D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7$

Xác định  $a$  để phương trình:  $\log_2(3^x - 1) \cdot \log_4(2 \cdot (3^x - 1)) = a$  có nghiệm  $x \geq 1$

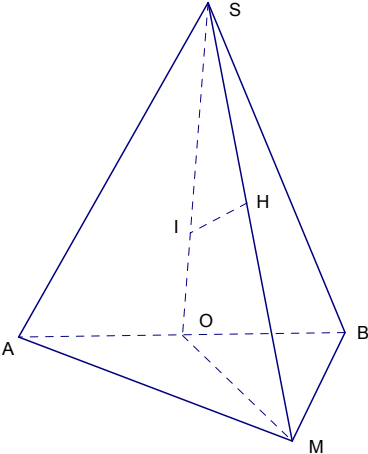
.....Hết.....

**ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM - ĐỀ CHẴN**

Câu	Đáp án	Điểm																		
I	1) (2,5 điểm)																			
( 4,0 điểm)	TXĐ: $D = R$	0,25																		
	<ul style="list-style-type: none"><li>• Chiều biến thiên</li><li>• <math>\lim y = +\infty, x \rightarrow \pm\infty</math></li><li>• <math>y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)</math></li><li>• <math>y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, x = 0</math></li></ul>	0,50																		
	<div>▪ Bảng biến thiên:</div> <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>y'</math></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td><math>y</math></td><td><math>+\infty</math></td><td></td><td>2</td><td></td><td><math>+\infty</math></td></tr></table> <div>▪</div>	$x$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	$y'$	-	0	+	0	-	$y$	$+\infty$		2		$+\infty$	0,25
$x$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$															
$y'$	-	0	+	0	-															
$y$	$+\infty$		2		$+\infty$															
	Kết luận: về khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến, cực trị	0,50																		
	<div>▪ Đồ thị:</div> <ul style="list-style-type: none"><li>• Đồ thị: Cho <math>y=2 \Leftrightarrow x^4 - x^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}</math></li></ul> 	0,50																		
	2) (1 điểm) 2) Cách 1																			

	$x^4 - 2x^2 + 2 - m = 0 \quad (1)$ <p>Đặt <math>t = x^2</math> (<math>t \geq 0</math>)</p> <p>Phương trình trở thành:</p> $t^2 - 2t + 2 - m = 0 \quad (2)$ <p>(1) chỉ có 2 nghiệm <math>\Leftrightarrow</math> (2) có nghiệm trái dấu hoặc (1) có nghiệm kép dương</p> $\Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ \Delta' = 0 \\ -\frac{b}{2a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m < 0 \\ 1 - 2 + m = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m = 1 \end{cases}$ <p>Đ/s: <math>m = 1</math> hoặc <math>m &gt; 2</math>.</p> <p>Cách 2 : Sử dụng sự tương giao giữa hai đồ thị hàm số <math>y = x^4 - 2x^2 + 2</math> và <math>y = m</math></p> <hr/> <p>3.(0,05 điểm) Chứng minh rằng <math>\forall m</math> tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm cực trị của <math>(C_m)</math> là một tam giác vuông cân:</p> <p>Ta có: <math>y = x^4 - 2x^2 + 2 - m</math>  <math>y' = 4x^3 - 4x</math></p> $\Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - m \\ y = 1 - m \end{cases}$ <p>Gọi 3 điểm cực trị là:  <math>A(0, 2 - m), B(-1, 1 - m), C(1, 1 - m)</math></p> <p>Ta có:</p> $\overrightarrow{AB} = (-1, -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$ $\overrightarrow{AC} = (1, -1) \Rightarrow AC = \sqrt{2}$ $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 + 1 = 0, & \forall m \\ AB = AC = \sqrt{2}, & \forall m \end{cases}$ <p>Vậy <math>\Delta ABC</math> là tam giác vuông cân tại A, <math>\forall m</math>.</p>	<p>0,50</p> <p>0,50</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
Câu II	1) (1 điểm)	
	<p>1/ Giải: Biến đổi phương trình về dạng:</p> $\frac{1}{2} \log_2 (3^x - 1) \cdot \log_2 [2(3^x - 1)] = 1 \Leftrightarrow \log_2 (3^x - 1) \cdot [1 + \log_2 (3^x - 1)] = 2$ <p>Điều kiện: <math>3^x - 1 &gt; 0 \Leftrightarrow 3^x &gt; 1 \Leftrightarrow x &gt; 0</math></p> <p>Đặt <math>t = \log_2 (3^x - 1)</math>. Khi đó phương trình có dạng: <math>t(1 + t) = 2</math> (2)</p>	0,50

	$\Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(3^x - 1) = 1 \\ \log_2(3^x - 1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 1 = 2 \\ 3^x - 1 = 2^{-2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^x = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \log_3 \frac{5}{4} \end{cases}$ <p>Vậy phương trình có 2 nghiệm <math>x = 1; x = \log_3 \frac{5}{4}</math></p>	0,50
	2) (1 điểm)	
	<p>2/ Phương trình đã cho</p> $\Leftrightarrow \frac{5^x}{5^2} \cdot \frac{2^{\frac{3x}{x+1}}}{2^2} = 1 \Leftrightarrow 5^{x-2} \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}-2} = 1$ $\Leftrightarrow 5^{x-2} \cdot 2^{\frac{x-2}{x+1}} = 1 \Leftrightarrow \left[ 5 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}} \right]^{x-2} = 1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \cdot 2^{\frac{1}{x+1}} = 1 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{5} \\ x = 2 \end{cases}$	0,50
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1} \cdot \lg 2 = \lg \frac{1}{5} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1} = \frac{-\lg 5}{\lg 2} \\ x = 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{\lg 2}{\lg 5} = \frac{-(\lg 5 + \lg 2)}{\lg 5} = \frac{-\lg 10}{\lg 5} = -\frac{1}{\lg 5} \\ x = 2 \end{cases}$ <p>Đs : <math>x = 2</math> ; <math>x = -\frac{1}{\lg 5}</math></p>	0,50
III	<p><b>Câu 3</b></p> <p>1/ Khi M là điểm giữa cung AB</p> <p>a/ (1,50 điểm) <math>V_{S.ABM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot OM \cdot AB \cdot SO</math></p> $= \frac{1}{6} R \cdot 2R \cdot R\sqrt{3} = \frac{R^3\sqrt{3}}{3} dvtt$	0,50  0,50

	$d[B, (SAM)] = 2d[O, (SAM)] = 2OK = 2 \frac{OE \cdot OS}{\sqrt{OE^2 + OS^2}} = \frac{2R\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ <p><b>Cách 2:</b> <math>d[B, (SAM)] = \frac{3V_{SABM}}{dt(\Delta SAM)}</math></p> 	0,50
	<p><b>b/(1,50 điểm) Cách 1:</b> Để thấy SO là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông cân ABM.  Gọi N là trung điểm SA, mặt phẳng trung trực cạnh SA cắt SO tại J, để thấy J là tâm m/c  và JN vuông góc với SA. Tam giác SAB đều <math>\Rightarrow J \equiv I</math>, dẫn đến <math>R_{mc} = \frac{2R}{\sqrt{3}}</math></p> <p><b>Cách 2:</b> Để thấy tam giác SAB đều <math>OI = \frac{1}{3}SO \Rightarrow I</math> là tâm đường tròn ngoại tiếp <math>\Delta SAB \Rightarrow IA = IB = IS, I \in SO \Rightarrow IA = IB = IC</math>, dẫn đến I là tâm m/c và <math>R_{mc} = \frac{2R}{\sqrt{3}}</math>.</p>	0,50 0,50 0,50
	<p><b>2/(0,5 điểm) Khi M di động trên (C)</b>  Tứ giác IHMO nội tiếp nên <math>SH \cdot SM = SI \cdot SO</math> mà <math>OS = R\sqrt{3}</math>,  <math>SI = \frac{2R}{\sqrt{3}}</math>, <math>SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = 2R \Rightarrow SH = R</math> hay H là trung điểm của SM</p> <p>Gọi F là hình chiếu vuông góc của H lên mp(MAB) thì <math>HF = \frac{1}{2}SO = \frac{\sqrt{3}}{2}R</math>, (không đổi)  <math>\Rightarrow V_{BAHM}</math> lớn nhất khi <math>dt(\Delta MAB)</math> lớn nhất <math>\Rightarrow M</math> là điểm giữa của cung AB</p>	0,250 0,250
IV.a	<p><b>1/(0,50 điểm)</b> Đặt <math>t = x + y + z \Rightarrow t^2 = 3 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx = \frac{t^2 - 3}{2}</math>.</p> <p>Ta có <math>3 &lt; t^2 \leq 9 \Rightarrow \sqrt{3} &lt; t \leq 3</math> vì <math>t &gt; 0</math>.</p>	

	<p>Khi đó <math>A = \frac{1}{B}, B = \frac{t^2 - 3}{2} + \frac{3}{t}</math>.</p> <p>Xét hàm số <math>f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{t} - \frac{3}{2}, \sqrt{3} &lt; t \leq 3</math>.</p> <p>Ta có <math>f'(t) = t - \frac{3}{t^2} = \frac{t^3 - 3}{t^2} &gt; 0</math> vì <math>t &gt; \sqrt{3}</math>.</p> <p>Suy ra <math>f(t)</math> đồng biến trên <math>(\sqrt{3}, 3]</math>. Do đó <math>f(t) \leq f(3) = 4</math>.</p> <p>Dấu đẳng thức xảy ra khi <math>t = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1</math>.</p> <p>Vậy GTLN của <math>B</math> là 4 Suy ra GTNN của <math>A</math> là <math>\frac{1}{4}</math> đạt được khi <math>x = y = z = 1</math>.</p>	0,50
IV.b	<b>Cho ban cơ bản (0,50 điểm)</b>	
	<p>2) <math>\frac{1}{2} \log_2(3^x - 1) \cdot \log_2[2(3^x - 1)] = a \Leftrightarrow \log_2(3^x - 1) \cdot [1 + \log_2(3^x - 1)] = 2a</math> Đặt <math>t = \log_2(3^x - 1)</math>. Khi đó phương trình có dạng: <math>t(1+t) = 2a \Leftrightarrow f(t) = t^2 + t - 2a = 0</math> (2)</p> <p>Với <math>x \geq 1 \Rightarrow 3^x - 1 \geq 3 - 1 = 2 \Leftrightarrow \log_2(3^x - 1) \geq \log_2 2 = 1 \Leftrightarrow t \geq 1</math></p> <p>Cách 1: Vậy để phương trình (1) có nghiệm <math>x \geq 1 \Leftrightarrow t(1+t) = 2a \Leftrightarrow g(t) = t^2 + t = 2a</math>, với <math>t \geq 1</math> lập BBT, suy ra <math>2a \geq 2 \Leftrightarrow a \geq 1</math></p> <p>Cách 2: Vậy để phương trình (1) có nghiệm <math>x \geq 1 \Leftrightarrow (2)</math> có nghiệm <math>t \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq t_1 \leq t_2(*) \\ t_1 \leq 1 \leq t_2 \end{cases}</math> (loại (*))</p> <p>Dùng Vi-et hoặc xét dấu <math>f(x) \Rightarrow f(1) \leq 0 \Leftrightarrow 2 - 2a \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 1</math>.</p> <p>Vậy với <math>a \geq 1</math> thỏa mãn điều kiện đầu bài.</p>	0,05
	<p>Câu 4a, 4b làm đúng ra kết quả cuối cùng mới cho 0,5 điểm</p> <p>Các cách giải đúng khác cho điểm tối đa tương ứng với số điểm của câu đó.</p>	